



Cartomagie : principes de Gilbreath (I) - Dénombrement de mélanges américains

Aimé Lachal, Pierre Schott

► To cite this version:

Aimé Lachal, Pierre Schott. Cartomagie : principes de Gilbreath (I) - Dénombrement de mélanges américains. *Quadrature*, 2012, 85, pp. 24-35. hal-00864402

HAL Id: hal-00864402

<https://hal.science/hal-00864402>

Submitted on 22 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Cartomagie : principes de Gilbreath (I)

Dénombrement de mélanges américains

par Aimé LACHAL* et Pierre SCHOTT†

Résumé.

Les principes magiques de Gilbreath permettent, à partir d'un jeu de cartes préalablement classé après un mélange américain, de garder ses propriétés de classement par bloc de cartes mais de façon éventuellement désordonnée (les cartes d'un même bloc n'étant plus dans l'ordre du classement initial). De telles propriétés permettent de voir se réaliser des prédictions malgré un vrai mélange !

Nous exposons en trois parties ces principes de cartomagie. Dans ce premier volet, nous présentons les mélanges américains et détaillons leur dénombrement. Dans deux autres volets, nous présenterons des applications magiques des principes de Gilbreath, ainsi que leur démonstration mathématique.

I Introduction

I.1 La magie comme vecteur de recherche

De 1886 à 1896, Poincaré a occupé la chaire de « Calcul des probabilités » à la Sorbonne à Paris. Il rédigea un ouvrage intitulé « Calcul des probabilités » [24] (voir aussi [26]) qui parut d'abord en 1896. Dans la seconde édition, il apporte des réflexions nouvelles très fondamentales sur les groupes et les systèmes hypercomplexes ainsi que sur l'ergodicité. Il est amené à ces innovations par l'étude du battage des cartes et du mélange des liquides. Les problèmes de battage de cartes et de diffusion étudiés par Poincaré sont des exemples d'application du principe ergodique : si le jeu a été battu longtemps, toutes les permutations possibles sont également probables.

Divers types de battages sont alors utilisés dans le domaine de la magie : les mélanges parfaits (ou mé-

langes Faro intérieurs et extérieurs, voir e.g. [4], [6], [15], [25] ainsi que les références incluses), les mélanges de Monge (ou mélanges à l'espagnole, voir e.g. [4], [16]), les mélanges américains...

Les principes de Gilbreath [11], [12], [13] et leurs généralisations par le principe de Péristance [23] sont des principes passionnants, permettant de faire des tours de cartes extraordinaires. Des mathématiciens – comme M. Gardner [9], [10], [19], P. Diaconis [2], [7], [8], ou C. Mulcahy [20], [21], [22] –, des informaticiens – comme G. Huet [14], un des créateurs du langage Coq qui permet de faire de la preuve mathématique automatique – et d'autres encore se sont penchés sur ces principes, lesquels nécessitent au préalable la réalisation d'un mélange américain du jeu de cartes utilisé.

I.2 La magie comme vecteur d'enseignement

Pierre Schott est passionné de magie (peut-être faudrait-il dire de prestidigitation) et, depuis des années, il utilise ce vecteur d'enseignement, tant dans ses cours de physique dans une école d'ingénieurs que dans la formation d'enseignants et de futurs en-

* INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON, *Pôle de Mathématiques*,
20 av. A. Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex.
aime.lachal@insa-lyon.fr

† ÉCOLE SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE, D'ÉLECTRONIQUE ET D'AUTOMATISME, *Pôle ARNUM*,
9 rue Vésale, 75005 Paris.
schott@esiea.fr, magie.carte@laposte.net

seignants.

Un projet pluridisciplinaire proposé à des étudiants de Licence 2^e année (L2) consiste à programmer les compositions de tous les mélanges américains possibles issus d'un jeu de 52 cartes et à effectuer leur dénombrement.

Dans ce travail, nous examinons les mélanges américains d'un jeu de n cartes puis dans deux articles compagnons [17], [18], nous présenterons les principes de Gilbreath avec des applications originales à la cartomagie. Signalons qu'un article de Simon Willem portant sur le même thème est paru dans le numéro précédent de *Quadrature* [27]. Nos approches sont complémentaires l'une de l'autre.

Cet article est organisé de la manière suivante :

- dans la section II, nous donnons la modélisation d'un mélange américain d'un jeu de cartes ;
- dans la section III, nous détaillons les mélanges américains d'un jeu de 2, 3 et 4 cartes de manière exhaustive ;
- dans la section IV, nous effectuons le calcul de tous les mélanges américains dans le cas général ;
- dans la section V, nous fournissons les codes d'un programme réalisé avec Matlab simulant les mélanges américains ;
- enfin, l'appendice A contient des méthodes complémentaires de calcul du nombre de mélanges américains.

II Le mélange américain

Nous disposons d'un jeu de cartes numérotées de haut en bas $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$. Nous le coupons en une certaine position p , $1 \leq p \leq n$. Nous obtenons donc deux paquets : le premier paquet contenant p cartes notées C_1, C_2, \dots, C_p et le second contenant $q = n - p$ cartes notées $C_{p+1}, C_{p+2}, \dots, C_n$.

Le mélange américain (les magiciens parlent aussi de mélange « à la queue d'aronde » ou de mélange « à l'effeuillage », encore connu sous le vocable anglo-saxon de « riffle shuffle » ou de « dovetail shuffle ») associé à cette coupe consiste à intercaler des cartes du paquet tenu par exemple en main droite dans le paquet tenu en main gauche. Le nombre de cartes ainsi intercalées et la position (pour chaque insertion) sont totalement aléatoires. On pourra d'ailleurs consulter [3] pour un survol sur les mélanges aléatoires. Un exemple de mélange américain est présenté aux figures 1 et 2. La figure 1 montre la coupe du jeu initial en deux paquets (non nécessairement identiques) et la figure 2 montre l'insertion des deux paquets obtenus après la coupe.

Une modélisation d'un mélange américain consiste

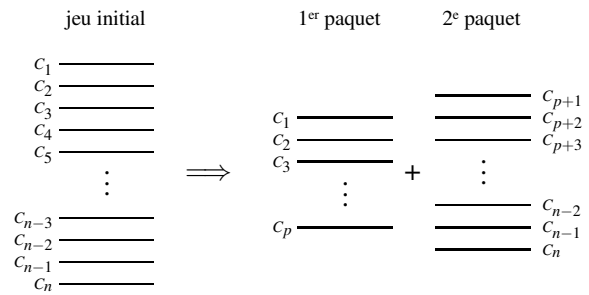


Figure 1. Coupe du jeu initial.

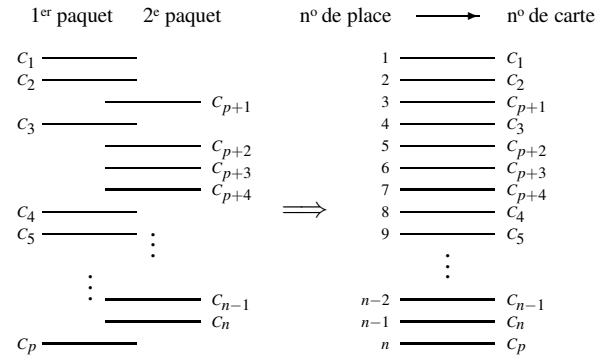


Figure 2. Insertion des deux paquets.

à introduire une permutation π qui à la carte C_i associe sa position dans le jeu final. La permutation réciproque π^{-1} donne la valeur de la carte située à la i^e position (figure 3).

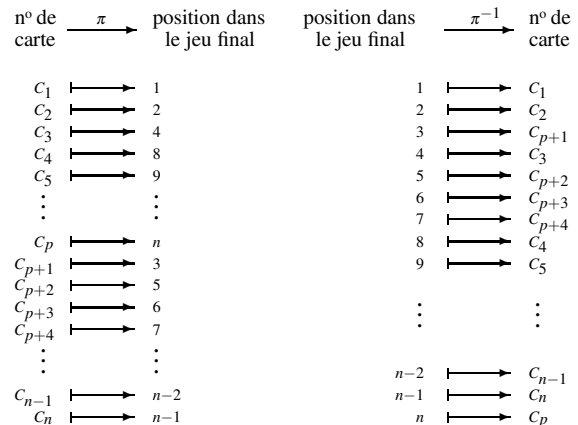


Figure 3. Permutations π et π^{-1} .

Notons que la coupe du jeu initial à la p^e position génère deux suites « ascendantes » pour π :

$$\pi(C_1) < \pi(C_2) < \dots < \pi(C_p),$$

$$\pi(C_{p+1}) < \pi(C_{p+2}) < \dots < \pi(C_n)$$

avec, dans le cas d'un mélange américain non trivial (c'est-à-dire lorsque π n'est pas la permutation identité), la condition $\pi(C_p) > \pi(C_{p+1})$. Diaconis & Graham appellent une telle permutation une permutation de Gilbreath ([5], chapitres 5 et 6).

L'objet de ce travail est de calculer le nombre $\mathcal{M}(n)$ de mélanges américains d'un jeu de n cartes. Le calcul explicite de $\mathcal{M}(n)$ a été succinctement fait par Aldous & Diaconis ([1], pp. 342–343) en utilisant un décompte de permutations ascendantes des numéros $1, 2, \dots, n$. Le résultat s'énonce

$$\boxed{\mathcal{M}(n) = 2^n - n.} \quad (*)$$

Nous proposons de retrouver cette valeur par une approche algorithmique. Notre algorithme passe par la coupe du jeu de n cartes en deux paquets : un de p cartes ($1 \leq p \leq n-1$) et l'autre de $q = n - p$ cartes, suite à laquelle nous intercalons le premier paquet dans le deuxième. Ceci nous amène à introduire le nombre intermédiaire $\mathcal{M}(p, q)$ de mélanges d'un paquet de p cartes dans un paquet de q cartes. Cette procédure nous fournit un nombre total de mélanges américains $\mathcal{M}_T(n)$ supérieur à $\mathcal{M}(n)$ car certains mélanges apparaissent plusieurs fois. Les doublons doivent ensuite être retirés pour pouvoir obtenir exactement $\mathcal{M}(n)$.

Une méthode de calcul de $\mathcal{M}(p, q)$ consiste à remarquer qu'insérer p cartes dans un paquet de q cartes revient, en termes de dénombrement, à prélever p cartes d'un jeu de $p + q$ cartes. Il y a $\binom{p+q}{p}$ tels prélèvements possibles. Nous retrouvons ce résultat par une autre technique dans l'esprit de notre démarche algorithmique. Nous mettons alors en évidence le mécanisme du mélange américain.

Dans cette démarche, nous sommes préalablement amenés à dénombrer les mélanges d'un jeu de p cartes dans un jeu de q cartes après la i^{e} carte ($0 \leq i \leq q$) de ce dernier. Pour $i = 0$, le jeu de p cartes est inséré sans restriction dans le paquet de q cartes ; pour $i = q$, le jeu de p cartes est au-dessous de celui de q cartes. Nous notons $\mathcal{M}_i(p, q)$ le nombre de tels mélanges. En particulier, $\mathcal{M}_0(p, q) = \mathcal{M}(p, q)$.

III Cas d'un jeu de 2, 3 ou 4 cartes

Nous commençons par nous concentrer sur le cas d'un jeu initial contenant 2 cartes, 3 cartes ou 4 cartes. Pour chaque cas, nous faisons l'inventaire exhaustif des mélanges américains possibles.

III.1 Mélanges américains avec 2 cartes

Prenons un jeu de cartes initial contenant 2 cartes dans l'ordre $C_1 - C_2$. Nous n'avons qu'une façon de couper le jeu (entre les deux cartes), comme présenté à la figure 4. Il existe deux mélanges possibles distincts qui sont présentés à la figure 5.

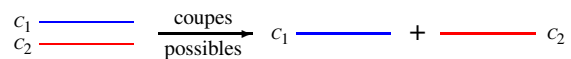


Figure 4. Coupes possibles d'un jeu de 2 cartes.

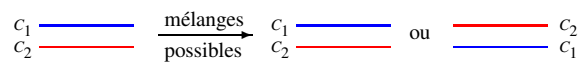


Figure 5. Mélanges possibles d'un jeu de 2 cartes.

Ainsi, le nombre total de mélanges américains vaut :

$$\mathcal{M}_T(2) = \mathcal{M}(1, 1) = 2.$$

Les deux mélanges ainsi décrits étant distincts, $\mathcal{M}(2) = \mathcal{M}_T(2) = 2$. Comme $2^2 - 2 = 2$, nous venons de vérifier la formule (*) pour $n = 2$.

En résumé, il n'existe que 2 mélanges américains issus d'un jeu initial de 2 cartes.

III.2 Mélanges américains avec 3 cartes

Prenons un jeu de cartes initial contenant 3 cartes dans l'ordre $C_1 - C_2 - C_3$. Nous avons 2 façons de couper le jeu, comme présenté à la figure 6.

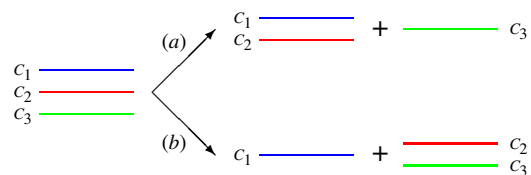


Figure 6. Coupes possibles d'un jeu de 3 cartes.

Pour chacune des deux coupes présentées à la figure 6, il existe plusieurs mélanges possibles, qui sont présentés à la figure 7.

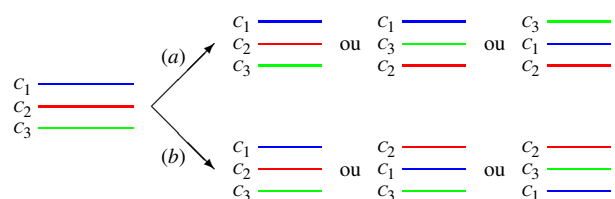


Figure 7. Mélanges possibles d'un jeu de 3 cartes.

Pour la coupe (b), nous devons calculer le nombre de mélanges d'un paquet de 1 carte dans un paquet de 2 cartes :

$$\mathcal{M}(1, 2) = 3.$$

Par ailleurs, pour la coupe (a), il est clair que mélanger un paquet de 2 cartes dans un paquet de 1 carte revient à mélanger un paquet de 1 carte dans un paquet de 2 cartes, soit :

$$\mathcal{M}(1, 2) = \mathcal{M}(2, 1).$$

L'algorithme fournit le nombre total de mélanges américains possibles ci-dessous :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_T(3) &= \mathcal{M}(2,1) + \mathcal{M}(1,2) \\ &= \sum_{p=1}^{3-1} \mathcal{M}(p, 3-p) = 6.\end{aligned}$$

Dans cet inventaire, nous observons que le mélange « invariant » $C_1 - C_2 - C_3$ apparaît deux fois. Nous devons donc retrancher 1 au nombre de mélanges fournis par l'algorithme. Ainsi le nombre total de mélanges américains distincts vaut :

$$\mathcal{M}(3) = \mathcal{M}_T(3) - 1 = 5.$$

Comme $2^3 - 3 = 5$, nous avons vérifié la formule (*) pour $n = 3$.

En résumé, pour un jeu initial de 3 cartes, il existe 2 façons de couper le jeu qui donnent 6 mélanges américains possibles dont 5 différents.

III.3 Mélanges américains avec 4 cartes

Prenons un jeu de cartes initial contenant 4 cartes dans l'ordre $C_1 - C_2 - C_3 - C_4$. Nous avons 3 façons de couper, comme présenté à la figure 8.

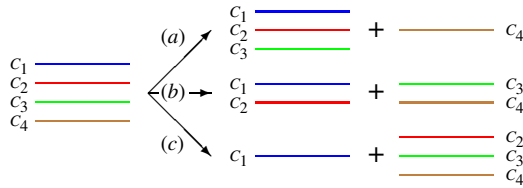


Figure 8. Coupes possibles d'un jeu de 4 cartes.

Tous les mélanges américains issus des première et troisième coupes (a) et (c), sont présentés à la figure 9.

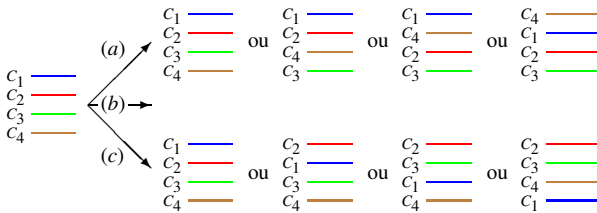


Figure 9. Mélanges possibles pour les coupes (a) et (c).

Remarquons que nous avons à chaque fois mélangé une carte dans un paquet de trois, ce qui nous donne la relation :

$$\mathcal{M}(3,1) = \mathcal{M}(1,3) = 4.$$

Pour la seconde coupe possible (b), nous mettons de côté la dernière carte C_2 et nous mélangeons la carte C_1 dans le paquet $C_3 - C_4$ selon la procédure détaillée

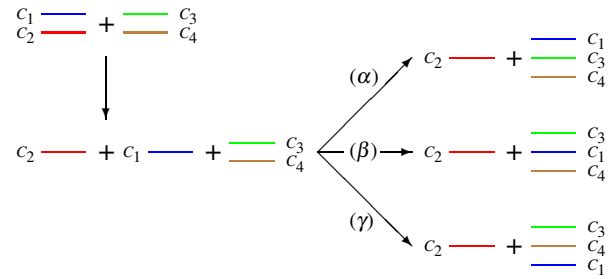


Figure 10. Mélanges possibles après décomposition du premier paquet ($C_1 - C_2$) dans le second ($C_3 - C_4$).

dans la sous-section III.2. Cette décomposition et les mélanges américains résultants sont présentés à la figure 10.

Nous mélangeons la carte C_2 dans l'ensemble des mélanges obtenus avec une condition essentielle : la carte C_2 doit toujours être insérée en dessous de la carte C_1 . Tous les mélanges possibles sont présentés à la figure 11.

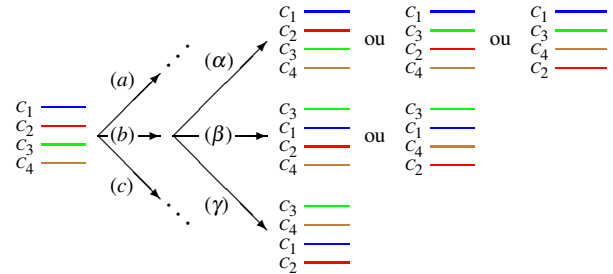


Figure 11. Mélanges possibles pour la coupe (b).

Nous venons de calculer algorithmiquement la valeur $\mathcal{M}(2,2)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(2,2) &= \mathcal{M}_1(1,3) + \mathcal{M}_2(1,3) + \mathcal{M}_3(1,3) \\ &= \sum_{i=1}^{2+1} \mathcal{M}_i(1,3)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1(1,3) &= \mathcal{M}(1,3-1) = 3, \\ \mathcal{M}_2(1,3) &= \mathcal{M}(1,3-2) = 2, \\ \mathcal{M}_3(1,3) &= 1.\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre total de mélanges américains fournis par l'algorithme précédent vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_T(4) &= \mathcal{M}(3,1) + \mathcal{M}(2,2) + \mathcal{M}(1,3) \\ &= \sum_{p=1}^{4-1} \mathcal{M}(p, 4-p) = 14.\end{aligned}$$

Dans cet inventaire, nous observons que le mélange « invariant » $C_1 - C_2 - C_3 - C_4$ apparaît 3 fois. Nous

devons donc retrancher 2 au nombre $\mathcal{M}_T(4)$. Ainsi le nombre total de mélanges américains distincts vaut :

$$\mathcal{M}(4) = \mathcal{M}_T(4) - 2 = 12.$$

Comme $2^4 - 4 = 12$, nous avons vérifié la formule (*) pour $n = 4$.

En résumé, pour un jeu initial de 4 cartes, il existe 3 façons de couper le jeu qui donnent 14 mélanges américains possibles dont 12 différents.

IV Cas d'un paquet de n cartes

IV.1 Préliminaires

Nous commençons par énoncer quelques propriétés simples des nombres $\mathcal{M}(p, q)$ et $\mathcal{M}_i(p, q)$.

Première propriété Insérer un paquet de p cartes dans rien donne évidemment un unique mélange qui est l'état initial du paquet à p cartes. De même, insérer aucune carte dans un paquet de q cartes donne un unique mélange qui est l'état initial de ce dernier. Ainsi,

$$\mathcal{M}(p, 0) = \mathcal{M}(0, q) = 1.$$

Deuxième propriété Insérer un paquet de p cartes dans un paquet de q cartes après la q^e position de ce dernier donne un unique mélange : le premier se retrouve sous le second. Cela conduit à

$$\mathcal{M}_q(p, q) = \mathcal{M}_p(q, p) = 1.$$

Troisième propriété Le nombre de mélanges possibles d'une carte dans un paquet de q cartes vaut $q + 1$ (figure 12). En d'autres termes,

$$\mathcal{M}(1, q) = q + 1.$$

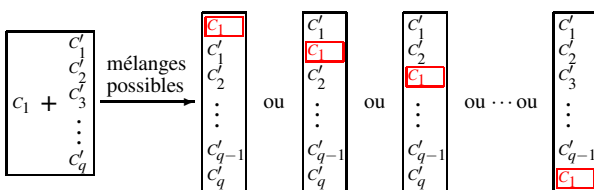


Figure 12. Mélanges d'une carte dans un paquet de q cartes.

Quatrième propriété Le nombre de mélanges américains d'un paquet de p cartes dans un paquet de q cartes coïncide avec celui d'un paquet de q cartes dans un paquet de p cartes :

$$\mathcal{M}(p, q) = \mathcal{M}(q, p).$$

La quantité $\mathcal{M}(p, q)$ est donc symétrique.

Cinquième propriété Nous avons la relation suivante entre le nombre de mélanges après la i^e position et le nombre total de mélanges possibles (figure 13) : pour $1 \leq i \leq q$,

$$\mathcal{M}_i(p, q) = \mathcal{M}(p, q - i). \quad (1)$$

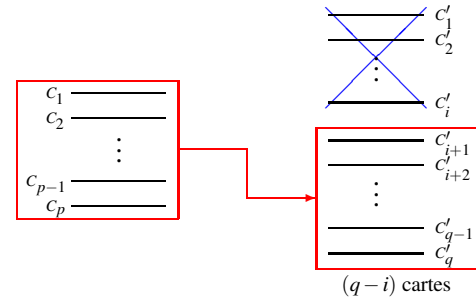


Figure 13. Insertion de p cartes après la i^e carte.

On remarquera que la quantité $\mathcal{M}_i(p, q)$ n'est pas symétrique par rapport à (p, q) . Pour $p = 1$, nous trouvons

$$\mathcal{M}_i(1, q) = \mathcal{M}(1, q - i) = q - i + 1$$

IV.2 Mélanges de p cartes dans q cartes

Proposition 1. Nous avons la relation suivante :

$$\mathcal{M}(p, q) = \sum_{i=1}^{q+1} \mathcal{M}_i(p - 1, q + 1). \quad (2)$$

Démonstration. Lors du mélange d'un jeu de p cartes dans un jeu de q cartes, nous plaçons d'abord la première carte du premier jeu dans le deuxième à une certaine position i , $1 \leq i \leq q + 1$ (la valeur $i = q + 1$ correspondant au placement de la carte sous le deuxième jeu), puis nous insérons les $(p - 1)$ cartes suivantes du premier jeu dans le deuxième paquet (constitué à présent de $(q + 1)$ cartes) après la position i (figure 14). En faisant varier i de 1 à $(q + 1)$, cela donne la formule (2).

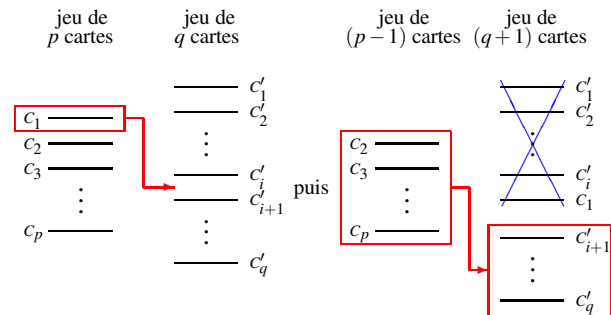


Figure 14. Insertion de c_1 après la i^e carte.

□

Remarque 2. Nous tirons de (1) et (2) les égalités

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(p, q) &= \sum_{i=1}^{q+1} \mathcal{M}(p-1, q+1-i) \\ &= \sum_{j=0}^q \mathcal{M}(p-1, j).\end{aligned}\quad (3)$$

En écrivant alors

$$\mathcal{M}(i, q) - \mathcal{M}(i-1, q) = \sum_{j=0}^{q-1} \mathcal{M}(i-1, j),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(p, q) &= \mathcal{M}(0, q) + \sum_{i=1}^p [\mathcal{M}(i, q) - \mathcal{M}(i-1, q)] \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} \mathcal{M}(i, j).\end{aligned}$$

Cette relation permet d'exprimer $\mathcal{M}(p, q)$ au moyen des $\mathcal{M}(i, j)$, $0 \leq i \leq p-1$, $0 \leq j \leq q-1$.

Nous avons également d'après (3)

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(p+1, q+1) &= \sum_{i=0}^{q+1} \mathcal{M}(p, i) \\ &= \sum_{i=0}^q \mathcal{M}(p, i) + \mathcal{M}(p, q+1) \\ &= \mathcal{M}(p+1, q) + \mathcal{M}(p, q+1).\end{aligned}$$

À présent, nous déduisons de la proposition 1 la valeur de $\mathcal{M}(p, q)$ ci-dessous.

Théorème 3. Le nombre de mélanges d'un jeu de p cartes dans un jeu de q cartes est donné par

$$\mathcal{M}(p, q) = \binom{p+q}{p}. \quad (4)$$

Plusieurs démonstrations de (4) sont possibles. Nous décrivons ci-dessous la plus simple qui repose sur un raisonnement par récurrence. À titre indicatif, nous proposerons dans l'appendice A deux autres démonstrations de nature plus constructive que nous trouvons intéressantes.

Démonstration. Nous prouvons (4) par récurrence sur p . La formule est clairement valable pour $p = 0$. Fixons maintenant $p \geq 1$. Supposons que pour tout q , $\mathcal{M}(p-1, q) = \binom{p+q-1}{p-1}$. Alors, d'après (3),

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(p, q) &= \sum_{i=1}^{q+1} \mathcal{M}(p-1, q+1-i) \\ &= \sum_{i=0}^q \binom{p+q-1-i}{p-1} \\ &= \sum_{i=p-1}^{p+q-1} \binom{i}{p-1}.\end{aligned}$$

En utilisant la formule bien connue $\sum_{i=j}^k \binom{i}{j} = \binom{k+1}{j+1}$ (qui vient de la formule de Pascal $\binom{i}{j} = \binom{i+1}{j+1} - \binom{i}{j+1}$ conduisant à une somme télescopique), nous tirons immédiatement (4), ce qui termine la démonstration par récurrence. \square

IV.3 Mélanges américains d'un jeu de n cartes

Proposition 4. Nous avons la relation suivante :

$$\mathcal{M}(n) = 1 + \sum_{p=1}^{n-1} [\mathcal{M}(p, n-p) - 1]. \quad (5)$$

Démonstration. Dénombrer tous les mélanges américains d'un jeu de n cartes revient à compter tous les mélanges différents d'un paquet de p cartes dans un paquet de $(n-p)$ cartes en faisant varier p de 1 à $(n-1)$, ces deux paquets étant obtenus lors de la coupe du jeu initial. Nous sommes donc amenés à additionner les $\mathcal{M}(p, n-p)$, $1 \leq p \leq n-1$ qui donne directement $\mathcal{M}_T(n)$ sans omettre, pour le calcul de $\mathcal{M}(n)$, de retrancher les mélanges identiques qui pourraient apparaître au cours de deux coupes distinctes.

Nous allons voir que seul le mélange « invariant » (pour lequel aucune carte n'a changé de place après la coupe) est commun à deux coupes distinctes. En examinant toutes les coupes possibles, nous constatons que les éventuels mélanges identiques démarrent par la première carte (disons la carte C_1) du jeu initial.

À l'issue de la coupe n° 1 (figure 15), le jeu final commence par C_1 ou C_2 , il y a n jeux distincts dont 1 jeu commençant par C_1 et $(n-1)$ jeux commençant par C_2 (figure 16).

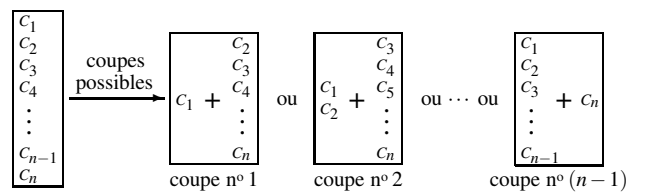


Figure 15. Coupes possibles d'un jeu de n cartes.

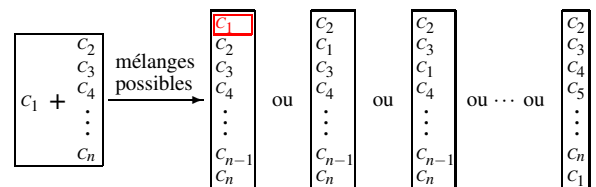


Figure 16. Mélanges associés à la coupe n° 1.

À l'issue de la coupe n° 2, le jeu final commence par C_1 ou C_3 (figure 17).

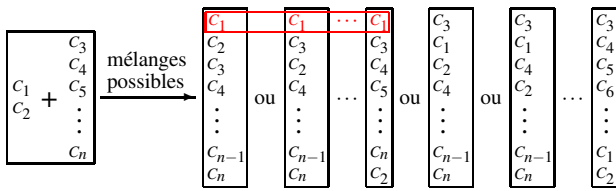


Figure 17. Mélanges associés à la coupe n° 2.

À l'issue de la coupe n° 3, le jeu final commence par C_1 ou C_4 , il y a $\binom{n}{3}$ jeux différents dont $\binom{n-1}{2}$ commençant par C_1 et $\binom{n-1}{3}$ commençant par C_4 (figure 18).

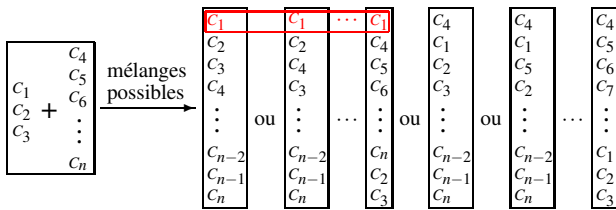


Figure 18. Mélanges associés à la coupe n° 3.

De manière générale, nous observons qu'à l'issue de la coupe n° p ($1 \leq p \leq n-1$), il y a $\binom{n}{p}$ jeux associés dont $\binom{n-1}{p-1}$ commençant par C_1 (qui correspondent au placement des $(p-1)$ cartes C_2, \dots, C_p parmi les $(n-1)$ cartes C_2, \dots, C_n) et $\binom{n-1}{p}$ commençant par C_{p+1} (qui correspondent au placement des cartes C_1, \dots, C_p parmi les $(n-1)$ cartes $C_1, \dots, C_p, C_{p+2}, \dots, C_n$, figure 19).

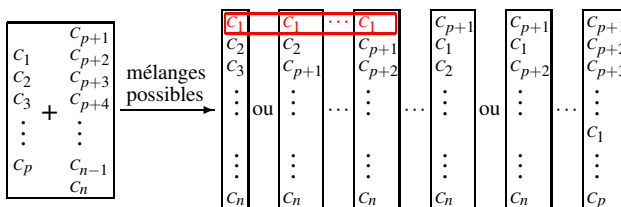


Figure 19. Mélanges associés à la coupe n° p .

Il apparaît clairement que les mélanges communs à deux coupes distinctes commencent nécessairement par la première carte du jeu. En faisant appel à la formule classique $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$, nous trouvons $\sum_{p=1}^{n-1} \binom{n-1}{p-1} = 2^{n-1} - 1$ mélanges (distincts ou confondus) commençant par C_1 et $\sum_{p=1}^{n-1} \binom{n-1}{p} = 2^{n-1} - 1$ mélanges distincts ne commençant pas par C_1 .

En retirant la carte C_1 à chacun des mélanges de la première famille, nous disposons de paquets de $(n-1)$ cartes (constitués de C_2, C_3, \dots, C_n) qui sont en fait les mélanges américains du jeu initial $C_2 - C_3 - \dots - C_n$ obtenus selon le même algorithme qu'auparavant. En reprenant le raisonnement précédent, nous observons que les mélanges identiques recherchés commencent

non seulement par la carte C_1 (en première position), mais ensuite par la carte C_2 (en deuxième position).

En réitérant cette procédure de proche en proche, nous aboutissons à la conclusion que le seul mélange commun à deux coupes différentes est le mélange « invariant », i.e. nous retrouvons exactement le jeu initial. Ce mélange apparaît donc n fois dans notre procédé, alors que tous les autres mélanges ne se produisent qu'une fois.

Finalement, nous comptons d'abord le mélange invariant, puis tous les mélanges de p cartes dans un paquet de $(n-p)$ cartes, excepté le mélange « invariant » pour chaque p variant de 1 à $(n-1)$. Cela donne la formule (5). \square

Nous pouvons enfin énoncer le résultat principal de l'article.

Théorème 5. Le nombre de mélanges américains distincts d'un jeu de n cartes est donné par

$$\mathcal{M}(n) = 2^n - n.$$

Démonstration. En utilisant (4) et (5), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(n) &= \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} - (n-2) \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} - n = 2^n - n. \end{aligned}$$

\square

V Codes Matlab

Ce travail a fait l'objet d'un projet destiné aux étudiants de niveau Licence L2 d'une école d'ingénieurs ayant reçu un cours de 20 heures de programmation sous Matlab. Le sujet du projet consistait à élaborer un programme sous Matlab fournissant tous les mélanges américains issus d'un jeu composé de n cartes. Le dénombrement était demandé à partir des résultats informatiques.

Nous fournissons dans les parties suivantes les codes Matlab d'un programme générant tous les mélanges possibles d'un jeu de n cartes. Ce programme est constitué d'une fonction principale qui fait appel à deux fonctions secondaires. Il est enregistré dans trois fichiers différents :

- le programme principal dans le fichier « principal_melange.m » ;
- une fonction récursive dans le fichier « melange_p_dans_n.m » ;
- la seule fonction qui réellement mélange une carte dans un paquet dans le fichier « melange_1_dans_n.m ».

Pour chacune de ces fonctions, nous proposons un en-tête décrivant simplement

- le synopsis de la fonction ;
- les variables d'entrée ;
- les variables de sortie ;
- les variables locales.

V.1 Description générale du programme

L'utilisateur choisit le nombre de cartes du jeu qui sont numérotées de 1 à n . Le programme génère d'abord les deux paquets résultant d'une coupe, et ce pour l'ensemble des $(n - 1)$ coupes possibles. Puis, pour chacune des coupes, le programme détermine l'ensemble des mélanges possibles grâce à une procédure récursive qui est basée sur le principe algorithmique suivant :

- pour mélanger un paquet de p cartes dans q cartes, la dernière du paquet de p cartes est mise de côté et il faut alors mélanger le paquet de $(p - 1)$ cartes restant dans q cartes ;
- l'opération antérieure est répétée $(p - 1)$ fois à l'aide des appels successifs du même module récursif jusqu'à devoir mélanger un paquet de 1 carte dans q cartes (figure 20) ;

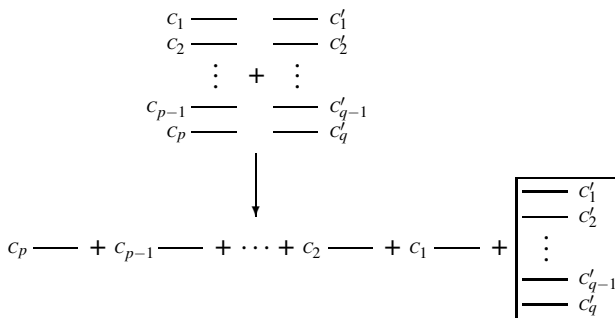


Figure 20. Décomposition du premier paquet ($C_1 - \dots - C_p$).

- puis, lorsque le résultat est obtenu, le programme récursif remonte d'un appel, et la seconde carte est alors mélangée avec l'ensemble des mélanges précédemment obtenus, et ainsi de suite (figure 21) pour finalement générer tous les mélanges possibles pour un couple (p, q) donné.

V.2 Listings des codes Matlab

Pour définir le nombre de cartes du jeu initial, il suffit de modifier la première ligne du programme principal. Si, par exemple, on souhaite obtenir tous les mélanges issus d'un jeu de 4 cartes, on inscrira $n=4$.

Le programme affichera ensuite une matrice nommée M qui regroupera la totalité des mélanges issus du jeu de 4 cartes (incluant les redondants), puis une ma-

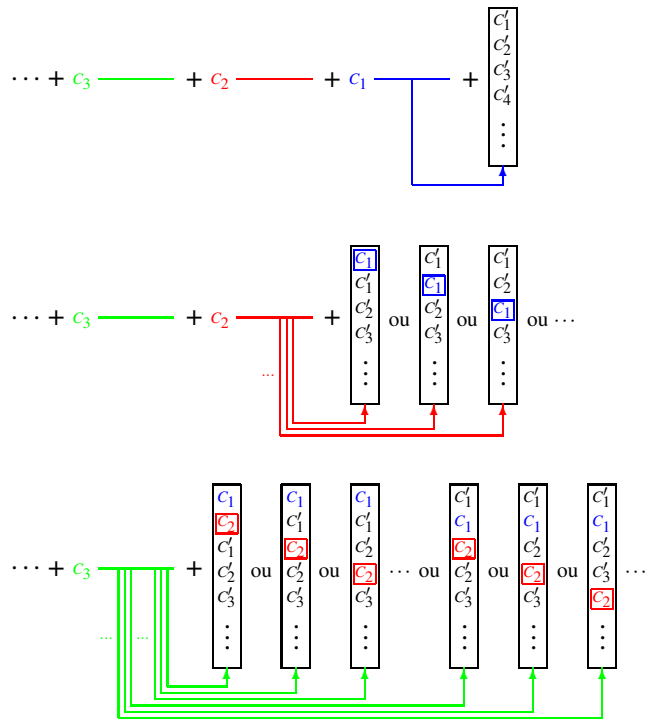


Figure 21. Résultat partiel du module récursif.

trice nommée $M_ss_doublon$ qui regroupera les mélanges possibles sans les redondants.

Le i^e mélange possible est mis en mémoire et affiché à la i^e ligne des matrices. Par exemple, la lecture de la ligne $[3 \ 1 \ 2 \ 4]$ indique que la carte à la première position du i^e mélange est la troisième carte du jeu initial, la carte à la seconde position est la première carte du jeu initial, la carte à la troisième position est la seconde carte du jeu initial et la carte à la dernière position est la dernière carte du jeu initial. En d'autres termes, le jeu initial $[1 \ 2 \ 3 \ 4]$ a été transformé par mélange américain en $[3 \ 1 \ 2 \ 4]$, comme présenté à la figure 22.

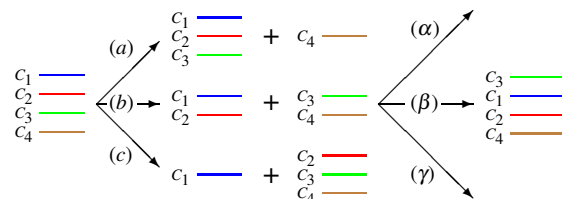


Figure 22. Jeu initial de 4 cartes : toutes coupes possibles, un mélange possible.

V.2.1 Génération des coupes d'un jeu

Nous fournissons ci-dessous le programme principal nommé « principal_melange.m ». Son en-tête est décrit au tableau 1.

Synopsis	Le programme génère tour à tour deux paquets de cartes issus de toutes les coupes possibles (boucle 'FOR') et pour chaque coupe il trouve tous les mélanges possibles. A la fin, le programme enlève tous les doublons (i.e. les mélanges présents plusieurs fois).
Entrées	Aucune
Sorties	Aucune
Variables locales	n : nombre de cartes du jeu Pi,P1,P2 : paquets de cartes (la première carte est celle du dessus) M : matrice des mélanges (une ligne = un mélange) M_ss_doublon : matrice des mélanges ôtée des doublons R,test,Mi : matrices intermédiaires des mélanges aSupprimer : tableau des n ^{os} des lignes à supprimer dans M

Tableau 1. En-tête du programme « melange_principal.m »

```

n=52; % nombres de cartes du jeu
Pi = 1:n;
for i=1:n-1
    P1 = Pi(1:i);
    P2 = Pi(i+1:n);
    n2 = length(P2);
    [Mi, place_carte] = melange_p_dans_n(P1, P2);
    if (i==1)
        M = Mi;
    else
        M = [M; Mi];
    end
    clear P1
    clear P2
end
M % Affichage de la matrice des mélanges
% Nous enlevons les doublons
[nb_ligne_M, nb_colonne_M] = size(M);
M_ss_doublon = M;
R = sum(M_ss_doublon.^2,2);
test = triu((M_ss_doublon*M_ss_doublon') ...
    ./ sqrt(R*R')) - eye(size(M_ss_doublon,1));
aSupprimer = unique(rem(find(abs(...
    test(:)-1)<1E-10), nb_ligne_M));
M_ss_doublon(aSupprimer,:) = []

```

Ce programme fait appel à une fonction intermédiaire « melange_p_dans_n » qui elle-même dépend d'une autre fonction nommée « melange_1_dans_n ». Nous décrivons ces deux fonctions dans les sous-sections suivantes.

V.2.2 Génération des mélanges américains d'un jeu déjà coupé

Nous donnons ici la première fonction appelée par le programme principal, nommée « melange_p_dans_n ». C'est un module récursif dont l'appel à lui-même se fait au milieu du programme. Ainsi, en remontant, le programme doit à chaque fois exécuter l'autre moitié du code avant de remonter encore d'un appel. Son en-tête est détaillé au tableau 2.

Synopsis	Le programme génère tous les mélanges américains possibles issus d'un paquet de p cartes dans un paquet de q cartes.
Entrées	P1,P2 : paquets de cartes (la première carte est celle du dessus)
Sorties	place_carte : tableau des places de la dernière carte insérée dans le mélange (une case = un mélange) M : matrice des mélanges (une ligne = un mélange)
Variables locales	n1,n2 : nombre de cartes du paquet XXXi : variable intermédiaire de la variable XXX carte_dessous : carte que nous mettons à l'écart Nb_ligne_Mi : nombre de mélanges contenus dans Mi

Tableau 2. En-tête de la fonction « melange_p_dans_n.m »

```

function [M, place_carte] = melange_p_dans_n(P1, P2)
n1 = length(P1);
n2 = length(P2);
if (n1 == 1)
    [M, place_carte] = melange_1_dans_n(0, P1(1,1), P2);
else
    carte_dessous = P1(n1);
    P1reste = P1(1,1:n1-1);
    [Mi, place_carte_p_dans_n] = ...
        melange_p_dans_n(P1reste, P2);
    tab = size(Mi);
    nb_ligne_Mi = tab(1);
    for i=1:nb_ligne_Mi
        [Mii, place_carte_i] = ...
            melange_1_dans_n(place_carte_p_dans_n(i), ...
                carte_dessous, Mi(i,:));
        if (i == 1)
            M = Mii;
            place_carte = place_carte_i;
        else
            M = vertcat(M, Mii);
            place_carte = horzcat(place_carte, ...
                place_carte_i);
        end
        clear Mii
        clear place_carte_i
    end
end

```

V.2.3 Génération de tous les mélanges d'un jeu déjà coupé

Nous donnons à présent la fonction « melange_1_dans_n » appelée à la fin de la récursivité précédente. Son en-tête est détaillé au tableau 3.

Synopsis	Le programme génère tous les mélanges américains possibles issus de la carte c1 dans un paquet de q cartes noté P2. Chaque insertion se fait après la i ^e carte.
Entrées	P2 : paquet de cartes (la première carte est celle du dessus) i : position après laquelle doit être insérée c1 c1 : carte à insérer dans P2
Sorties	place_carte : tableau des places de la dernière carte insérée dans le mélange (une case = un mélange) M : matrice des mélanges (une ligne = un mélange)
Variables locales	n2 : nombre de cartes du paquet P2 début : première position possible de c1 dans P2

Tableau 3. En-tête de la fonction « melange_1_dans_n.m »

```

function [M, place_carte]=melange_1_dans_n(i, c1, P2)
n2 = length(P2);
if (i == 0)
    debut = 1;
elseif (i > n2+1)
    debut = n2+1;
else
    debut = i+1;
end
for k=debut:n2+1
    place_carte(k-debut+1) = k;
    if (k == 1)
        M(k-debut+1,1) = c1;
        M(k-debut+1,2:n2+1) = P2(1,:);
    elseif (k == n2+1)
        M(k-debut+1,1:n2) = P2(1,:);
        M(k-debut+1,n2+1) = c1;
    else
        M(k-debut+1,1:k-1) = P2(1,1:k-1);
        M(k-debut+1,k) = c1;
        M(k-debut+1,k+1:n2+1) = P2(1,k:n2);
    end
end
end

```

V.2.4 Temps d'exécution

Nous fournissons dans le tableau ci-dessous les temps d'exécution (en secondes) de notre programme pour des jeux ne dépassant pas 20 cartes. Ces résultats ont été obtenus sous un PC HP EliteBook 8530p avec un processeur de 2.66 GHz et une mémoire vive de 2Go et sous une version de Matlab 6.5. Le module récursif utilise énormément de mémoire et le temps d'exécution explose à cause de la mise en mémoire des variables, non plus en mémoire vive mais en mémoire morte. Pour un jeu de 21 cartes, Matlab indique une « erreur mémoire » qui nous empêche d'accéder à la composition des mélanges correspondants. Des outils de parallélisation des calculs s'avèrent nécessaires.

Nombre de cartes dans le jeu initial	Temps d'exécution	Temps pour ôter les doublons	Nombre de mélanges distincts
2	< 1	< 1	2
3	< 1	< 1	5
4	< 1	< 1	12
5	< 1	< 1	27
6	< 1	< 1	58
7	< 1	< 1	121
8	< 1	< 1	248
9	< 1	< 1	503
10	< 1	< 1	1014
11	< 1	< 1	2037
12	< 1	< 1	4084
13	< 1	1.458	8179
14	1.44	10.382	16370
15	5.1	51.845	32753
16	26.18	1250	65520
17	129.23	> 3600	131055
18	624.87	> 3600	262126
19	2751.7	> 18000	524269
20	11606	> 84600	1048556

Tableau 4. Temps d'exécution

A Appendice : autres méthodes de calcul des nombres $\mathcal{M}(p, q)$

Nous avons démontré la formule (4) par récurrence. Cette approche nécessitait la connaissance *a priori* du résultat. Dans cet appendice, nous proposons deux méthodes plus constructives (utilisant des récurrences immédiates) pour calculer les nombres $\mathcal{M}(p, q)$ puis retrouver directement le résultat (4). Les deux méthodes reposent sur les relations (1) et (2) qui fournissent

$$\mathcal{M}(p, q) = \sum_{i=0}^q \mathcal{M}(p-1, i). \quad (6)$$

Ces démonstrations nous semblent pertinentes et peuvent faire l'objet d'exercices intéressants.

A.1 Une méthode itérative

En itérant plusieurs fois de suite la formule (6), nous obtenons progressivement

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}(p, q) &= \sum_{i_1=0}^q \mathcal{M}(p-1, i_1) \\
 &= \sum_{i_1=0}^q \sum_{i_2=0}^{i_1} \mathcal{M}(p-2, i_2) \\
 &= \sum_{i_1=0}^q \sum_{i_2=0}^{i_1} \sum_{i_3=0}^{i_2} \mathcal{M}(p-3, i_3) \\
 &= \dots = \sum_{i_1=0}^q \sum_{i_2=0}^{i_1} \dots \sum_{i_p=0}^{i_{p-1}} \mathcal{M}(0, i_p).
 \end{aligned}$$

En rappelant que $\mathcal{M}(0, i_p) = 1$, la dernière égalité ci-dessus donne

$$\mathcal{M}(p, q) = \sum_{i_1=0}^q \sum_{i_2=0}^{i_1} \dots \sum_{i_p=0}^{i_{p-1}} 1 = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_p \in \mathbb{N}: \\ 0 \leq i_p \leq i_{p-1} \leq \dots \leq i_1 \leq q}} 1.$$

La somme précédente n'est autre que le nombre de p -uplets d'entiers (i_1, i_2, \dots, i_p) vérifiant

$$0 \leq i_p \leq i_{p-1} \leq \dots \leq i_1 \leq q. \quad (7)$$

En transformant les indices $i_p, i_{p-1}, i_{p-2}, \dots, i_1$ respectivement en $j_1 - 1, j_2 - 2, j_3 - 3, \dots, j_p - p$, le nombre en question coïncide avec celui des p -uplets d'entiers (j_1, j_2, \dots, j_p) vérifiant

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq p + q. \quad (8)$$

D'un point de vue combinatoire, nous voyons que les p -uplets (j_1, j_2, \dots, j_p) satisfaisant à (8) sont précisément les combinaisons de p entiers parmi $1, 2, \dots, p + q$. Il y en a $\binom{p+q}{p}$, c'est le résultat (4). En fait, les p -uplets (i_1, i_2, \dots, i_p) remplissant la condition (7) sont les combinaisons *avec répétition* de p entiers parmi $0, 1, 2, \dots, q$.

A.2 Une méthode matricielle

Introduisons la matrice-colonne de type $(q+1) \times 1$

$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} \mathcal{M}(p, q) \\ \mathcal{M}(p, q-1) \\ \mathcal{M}(p, q-2) \\ \vdots \\ \mathcal{M}(p, 0) \end{pmatrix}$$

ainsi que la matrice carrée de type $(q+1) \times (q+1)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La relation (6) conduit à l'égalité matricielle suivante : pour tout $p \geq 1$,

$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^q \mathcal{M}(p-1, i) \\ \sum_{i=0}^{q-1} \mathcal{M}(p-1, i) \\ \sum_{i=0}^{q-2} \mathcal{M}(p-1, i) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^0 \mathcal{M}(p-1, i) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{M}_{p-1}.$$

Nous avons donc affaire à une suite matricielle géométrique dont l'expression générale est

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{A}^p \mathbf{M}_0$$

où \mathbf{M}_0 est la matrice-colonne de type $(q+1) \times 1$ donnée par

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il reste à calculer les puissances de la matrice triangulaire \mathbf{A} . Commençons par calculer son carré :

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & q+1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que nous écrirons sous la forme

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{q+1}{1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{3}{1} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{2}{1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{1}{1} \end{pmatrix}.$$

À l'aide de la formule $\sum_{i=j}^k \binom{i}{j} = \binom{k+1}{j+1}$, nous obtenons le cube de \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{q+2}{2} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{4}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{3}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{2}{2} \end{pmatrix}.$$

En réitérant cette procédure, nous trouvons plus généralement

$$\mathbf{A}^p = \begin{pmatrix} \binom{p-1}{p-1} & \binom{p}{p-1} & \binom{p+1}{p-1} & \cdots & \binom{p+q-1}{p-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{p+1}{p-1} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{p}{p-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{p-1}{p-1} \end{pmatrix}.$$

Puis

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{A}^p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=p-1}^{p+q-1} \binom{i}{p-1} \\ \sum_{i=p-1}^{p+q-2} \binom{i}{p-1} \\ \sum_{i=p-1}^{p+q-3} \binom{i}{p-1} \\ \vdots \\ \sum_{i=p-1}^{p-1} \binom{i}{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{p+q}{p} \\ \binom{p+q-1}{p} \\ \binom{p+q-2}{p} \\ \vdots \\ \binom{p}{p} \end{pmatrix}.$$

Enfin, le nombre que nous recherchons – $\mathcal{M}(p, q)$ – est le premier terme de la matrice \mathbf{M}_p , soit $\binom{p+q}{p}$; c'est le résultat (4).

REMERCIEMENTS. Un grand merci à Philippe Quost, Sébastien Maizy et Claire Leroux qui nous ont encouragés à proposer ces sujets de mathémagie, ainsi qu'à Francis Denise pour une relecture minutieuse de ce travail et ses remarques constructives.

Références

- [1] D. ALDOUS, P. DIACONIS, *Shuffling cards and stopping times*, Amer. Math. Monthly 93(5) (1986), 333–348.
- [2] S. ASSAF, K. SOUNDARARAJAN, P. DIACONIS, *Riffle shuffles of a deck with repeated cards*, DMTCS Proceedings, 21st International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, 89–102, FPSAC 2009.
- [3] P. BIANE, *Combien de fois faut-il battre un jeu de cartes ?* Gaz. Math. 91 (2002), 4–10.
- [4] J. H. CONWAY, R. K. GUY, *The book of numbers*, Springer-Verlag, 1996.

- [5] P. DIACONIS, R. GRAHAM, *Magical mathematics : the mathematical ideas that animate great magic tricks*, Princeton University Press, 2011.
- [6] P. DIACONIS, R. L. GRAHAM, W. M. KANTOR, *The mathematics of perfect shuffles*, Advances in applied mathematics 4 (1983), 175–196.
- [7] P. DIACONIS, *From shuffling cards to walking around the building. An introduction to Markov chain theory*, Proc. Int. Congress, Berlin, Vol. I, Plenary Lectures, 187–204, 1998.
- [8] P. DIACONIS, *Mathematical developments from the analysis of riffle-shuffling*, In Groups Combinatorics and Geometry (A. Fuanou, M. Liebeck Eds.), 73–97, World Scientific, N.J., 2003.
- [9] M. GARDNER, *Mathematics, magic and mystery*, Dover Publication, 1958.
- [10] M. GARDNER, *Martin Gardner's mathematical games : the entire collection of his scientific American columns*, The Mathematical Association of America, 2005 (CD).
- [11] N. L. GILBREATH, *Magnetic colors*, The Linking Ring 38(5) (1958), 60.
- [12] N. L. GILBREATH, *Second Gilbreath principle*, The Linking Ring, June 1966.
- [13] N. L. GILBREATH, *Magic for an audience*, Genii 52(9-10-11) (1989).
- [14] G. HUET, *The Gilbreath trick : A case study in axiomatisation and proof development in the Coq Proof Assistant*, Proceedings, Second Workshop on Logical Frameworks, Edinburgh, 1991.
- [15] A. LACHAL, *Mélanges parfaits de cartes (I) — In-shuffles et out-shuffles*, Quadrature 76 (2010), 13–25.
- [16] A. LACHAL, *Mélanges parfaits de cartes (II) — Mélanges de Monge*, Quadrature 77 (2010), 23–29.
- [17] A. LACHAL, P. SCHOTT, *Cartomagie : principes de Gilbreath (II) — Quelques applications*, Quadrature 86 (2012), – .
- [18] A. LACHAL, P. SCHOTT, *Cartomagie : principes de Gilbreath (III) — Diverses démonstrations*, Quadrature 87 (2013), – .
- [19] A. MAGID, *Interview of Martin Gardner*, Notices AMS 52(6) (2005), 602–611.
- [20] C. MULCAHY, *Fitch Cheney's five card trick*, Math Horizons 10 (2003), 10–13.
- [21] C. MULCAHY, *Top 5 reasons to like mathematical card tricks*, Maths Horizon 11 (2004), 5–7.
- [22] C. MULCAHY, *An ESperiment with cards*, Math Horizons 14 (2007), 10–12.
- [23] D. PÉRIS, *La péristance (généralisation du second principe de Gilbreath)*, La boutique de l'illusion, Paris, 2006.
- [24] H. POINCARÉ, *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1912.
- [25] P. SCHOTT, *How to introduce the cyclic group and its properties representation with Matlab ? Thanks to magic using the perfect Faro shuffle*, Creative Education 2(1) (2011), 27–40.
- [26] O. B. SHEYNIN, *H. Poincaré's work on probability*, Archive for History of Exact Sciences, Vol. 42, no. 2, Springer Berlin, Heidelberg, 1991.
- [27] S. WILLEMIN, *Principe de Gilbreath et mélange américain*, Quadrature 84 (2012), 31–36.